לוגיקה (1) – תרגיל (5)

1. יהי φ פסוק כך שכל הפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $p_1,\dots,p_n$. נניח שקשר השלילה אינו מופיע ב-φ. יהי A המבנה כך ש-$A(p_i)=T$ לכל $1\le i\le n$. הוכיחו ש-$A(\varphi)=T$.

2.

א. כתבו את ההגדרה של קשר פסוקי.

ב. יהי φ פסוק כלשהו בשפה L (לתחשיב הפסוקים) ו-$\vec{P}=(p_1,\dots p_n)\subseteq L$ n-יה של פסוקים יסודיים. נגדיר פונקציה $f(\vec{\Phi})=Sub(\varphi,\vec{P},\vec{\Phi})$ (כאשר $\vec{\Phi}=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ היא n-יה של פסוקים ב-L). הוכיחו ש-f היא קשר פסוקי.

ג. יהיו $P_1,\dots,P_n$ פסוקים יסודיים, $\varphi,\chi,\phi_1,\dots,\phi_n$ פסוקים. הראו כי:

1) אם $\phi\models\chi$ אז גם $sub(\varphi,\vec{P},\vec{\phi})\models sub(\chi,\vec{P},\vec{\phi})$.

2) לקבוצת פסוקים Γ נגדיר $sub(\Gamma,\vec{P},\vec{\phi})\models\{sub(\gamma,\vec{P},\vec{\phi}):\gamma\in\Gamma\}$. הוכיחו שאם $\Gamma\models\varphi$ אז גם $sub(\Gamma,\vec{P},\vec{\phi})\models sub(\varphi,\vec{P},\vec{\phi})$.

3) הסיקו מהמשפט הסמנטי של ההצבה שאם φ פסוק כלשהו אז $\varphi\vee\neg\varphi$ טאוטולוגיה.

4) הוכיחו שאם φ, ψ פסוקים כלשהם אז $\neg(\varphi\wedge\psi)\equiv\neg\varphi\vee\neg\psi$.

ד. הראו ישירות מהגדרת ההצבה שאם $\vec{P}=(p_1,\dots p_n)\subseteq L,\varphi$ כבסעיף ב' כך ש-$(p_1,\dots p_n)$ כולם מופיעים ב-φ ו-$\vec{\Phi}=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ סדרת פסוקים כלשהי אזי מספר הקשרים הפסוקיים ב-$Sub(\varphi,\vec{P},\vec{\Phi})$ אינו נופל ממספר הקשרים ב-φ. אפיינו את סדרות הפסוקים $\vec{\Phi}$ כך שיש שוויון.

3. אוסף הפולינומים ב-n משתנים מעל השלמים (כלומר עם מקדמים שלמים) הוא אוסף פונקציות n מקומיות מעל הממשיים.

א. הראו שאוסף הפולינומים הנ"ל נוצר מן הפונקציות $+,-,\cdot$ והפונקציה הקבועה 1 (כלומר, לכל k טבעי יש לנו פונקציה k-מקומית $1_k(x_1,\dots,x_k)=1$).

ב. איזה אוסף פונקציות היה נוצר רק מ-$1,\cdot,+$.

ג. איזה אוסף פונקציות היה נוצר מ-$+$ בלבד.

דוגמה: בסעיף א' עליכם להראות שכל ביטוי מהצורה $\sum_{k_1+\dots+k_n=l} a_{\bar{k}}x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$ נוצר מן הפונקציות $+,-,\cdot$. למשל:
$$x^2y+y^3z=+(\bullet(\bullet(p_1(x,y,z),p_1(x,y,z)),p_2(x,y,z)),\ \bullet(p_2(x,y,z),\bullet(p_2(x,y,z),\bullet(p_2(x,y,z),p_3(x,y,z)))))$$
עליכם להוכיח באינדוקציה על n (מספר המשתנים) שכל מונום הוא נוצר, ואז להסיק שכל סכום של מונומים הוא נוצר (כאשר מדובר בפעולות $+,-,\cdot$ או בפעולות דו מקומיות מוכרות אחרות ניתן לכתוב גם $(x+y)$ ולאו בהכרח $+(x,y)$, כפי שנכתב בדוגמה).

בסעיפים ב' ו-ג' עליכם להוכיח את טענותיכם (ביתר פירוט: אילו בסעיף א' נתבקשתם לקבוע מהן הפונקציות הנוצרות מ-$+,-,\cdot$ היה עליכם להוכיח שכל פולינום ב-n משתנים הוא נוצר, ושכל פונקציה נוצרת היא פולינום ב-n משתנים).